

## QUESTIONARIO

1. Sia  $AB$  il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio  $r$ . L'angolo al centro  $\widehat{AOB}$  misura  $36^\circ$  e gli angoli alla base del triangolo isoscele  $AOB$  misurano  $72^\circ$ . Si tracci la bisettrice dell'angolo  $\widehat{OAB}$ . Gli angoli del triangolo  $AHB$  misurano:

$$\widehat{ABH} = 72^\circ \quad \widehat{BAH} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 72^\circ$$

Inoltre  $AB = AH = OH$

I triangoli  $OAB$  e  $AHB$  sono simili per il primo criterio di similitudine per avere gli angoli uguali e perciò hanno i lati omologhi in proporzione:

$$OA : AB = AB : HB \quad \text{ossia} \quad OB : AB = AB : HB$$

Quindi  $AB$  è la sezione aurea del raggio.

(Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento è quel segmento medio proporzionale tra il segmento stesso e la sua parte rimanente).

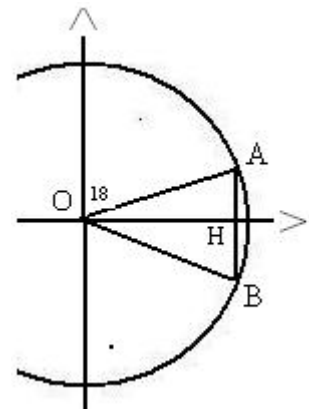
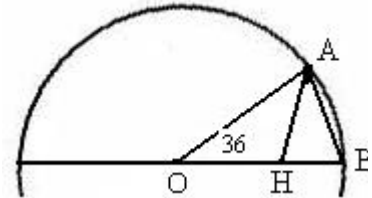
Posto  $\overline{AB} = x$  si ha  $\overline{HB} = r - x$  e quindi

$$r : x = x : (r - x) \quad \rightarrow \quad x^2 + rx - r^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r ; \quad \text{con } r=1 \quad \text{si ha} \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Riferendoci alla seconda figura:  $\sin 18^\circ = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$



2. Per  $\sin x = 1$  ( $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ) la funzione  $y = x \sin x$  diventa  $y = x$  e la sua derivata

$y' = \sin x + x \cos x$  diventa  $y' = 1 + 0 = 1$  come il coefficiente angolare di  $y = x$ .

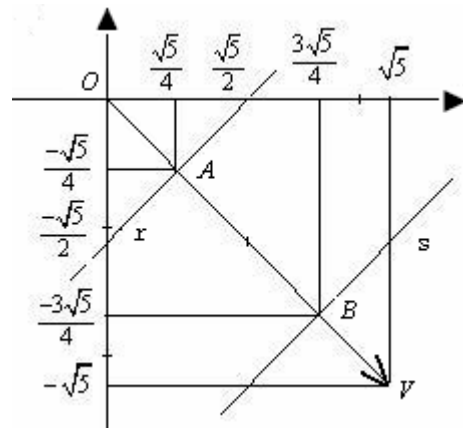
Ne segue che nei punti  $x_0$ , poichè la curva e la retta hanno ordinata e derivata uguale, la curva è tangente alla retta  $y = x$ .

Analogamente si dimostra che la curva è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\sin x = -1$ .

3. Ricordiamo che componendo due simmetrie assiali con assi paralleli si ottiene una traslazione di vettore perpendicolare ai due assi e di lunghezza doppia della distanza tra i due assi.

Si devono cercare due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\varphi$  che, composte, diano la traslazione data, ossia la traslazione di vettore  $\vec{v}(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ .

Per trovare i due assi  $r$ ,  $s$  dividiamo il segmento  $OV$  in tre parti in modo che  $AB = 2OA = 2BV$  e conduciamo per i punti  $A$  e  $B$  le rette  $r$ ,  $s$  perpendicolari a  $OV$ .



La retta  $OV$  ha come coefficiente angolare  $-1$ , passando per l'origine degli assi e per il punto  $V(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$  che ha coordinate opposte.

Come simmetrie  $\sigma$  e  $\varphi$  scegliamo quelle che hanno come assi le rette  $r$  e  $s$  perpendicolari alla retta  $OV$  e, quindi, di coefficiente angolare  $1$  e passanti, rispettivamente, per  $A(\frac{\sqrt{5}}{4}; -\frac{\sqrt{5}}{4})$  e  $B(\frac{3\sqrt{5}}{4}; -\frac{3\sqrt{5}}{4})$ .

Il fascio di rette perpendicolare a  $OV$  ha equazione:  $y = x + q$

$$\text{retta } r - \text{ passaggio per } A : -\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4} + q \rightarrow q = -\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = x + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{retta } s - \text{ passaggio per } B : -\frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4} + q \rightarrow q = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = x + \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

La simmetria rispetto alla retta di equazione  $y = x + q$  ha la forma  $\begin{cases} x' = y - q \\ y' = x + q \end{cases}$  per cui si ha

$$\sigma: \begin{cases} x' = y - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y' = x + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \varphi: \begin{cases} x' = y - \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ y' = x + \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\sigma \circ \varphi : \begin{cases} x \rightarrow y - \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \left(x + \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2} = x + \sqrt{5} \\ y \rightarrow x + \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \left(y - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2} = y - \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

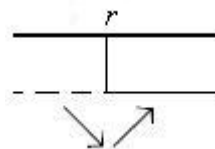
$$\varphi \circ \sigma : \begin{cases} x \rightarrow y - \frac{3\sqrt{5}}{2} \rightarrow \left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{2} = x - \sqrt{5} \\ y \rightarrow x + \frac{3\sqrt{5}}{2} \rightarrow \left(y - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{3\sqrt{5}}{2} = y + \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

4. Affinchè sia minima la quantità di materiale necessaria per realizzare la lattina di volume  $0,4$  litri, occorre minimizzare la superficie totale del cilindro circolare  $S = 2\pi r(r+h)$  dove con  $r$  e  $h$  indichiamo il raggio di base e l'altezza del cilindro.

$$\text{Da } V = \pi r^2 h \text{ otteniamo } h = \frac{V}{\pi r^2} \text{ e quindi } S = 2\pi r\left(r + \frac{V}{\pi r^2}\right) \rightarrow S = 2\pi r^2 + \frac{0,8}{r}$$

$$S' = 4\pi r - \frac{0,8}{r^2} \rightarrow S' = \frac{4\pi r^3 - 0,8}{r^2}$$

$$S' \geq 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 0,8 \rightarrow r \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} \quad (\approx 0,399)$$



Per  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}}$  è minima la superficie del cilindro e, quindi, è minima

la quantità di materiale necessaria per realizzare la lattina.

Poichè  $V$  è espresso in litri ( $1l = 1dm^3$ ),  $r$  è espresso in  $dm$ :  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} dm = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} cm \quad (\approx 3,99cm)$

Volendo generalizzare i risultati - osservando che  $0,8 = 2 \cdot 0,4$  - possiamo scrivere:  $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

5. Consideriamo la successione il termine generale è  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  con  $n \in \mathbb{N}_0$ . E'

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Risulta anche  $e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  dove  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  è una funzione reale di variabile reale, definita per  $x \neq 0$ .

$$- f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x$$

$$\text{essendo } \lim_{h \rightarrow 0} e^x = e^x \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$$

Descriviamo una possibile procedura per calcolare il numero  $e$  con una precisione voluta.

Occorre definire inizialmente una funzione potenza che riceve in ingresso una base reale positiva e un esponente naturale: potenza (base, n).

Nella procedura si fissa in ingresso un numero naturale piuttosto grande, chiamato max ed un altro numero naturale n.

Ciclo per n che va da 1 a max, che calcola la potenza pot1=potenza(1+1/n, n), la potenza pot2=potenza(1+1/n, n+1) e la loro differenza diff = pot2-pot1.

La procedura termina se (pot2-pot1) < potenza(10, -n).

Alla fine si scrive pot1 (come valore approssimato di e).

6. Le equazioni di una omotetia con centro nell'origine e di rapporto  $k$  sono  $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Applicando tali equazioni alla trasformata  $y = 2x - 4$  si ottiene:

$$ky = 2 \cdot kx - 4 \quad \rightarrow \quad y = 2x - \frac{4}{k} \quad \wedge \quad k \neq 0$$

Confrontando tale equazione con  $y = 1 + 2x$  si ha:  $-\frac{4}{k} = 1 \quad \rightarrow \quad k = -4$

Allo stesso risultato si perviene applicando le equazioni  $\begin{cases} x = \frac{x'}{k} \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases}$  all'equazione  $y = 1 + 2x$

e confrontando l'equazione risultante con  $y = 2x - 4$

7. Indichiamo con:  $D_{n,k}$  ( $n \geq k$ ) il numero di permutazioni di  $n$  elementi di classe  $k$

$C_{n,k}$  ( $n \geq k$ ) il numero di combinazioni di  $n$  elementi di classe  $k$

$P_n$  il numero di permutazioni di  $n$  elementi

si conosce che  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

8. L'equazione cartesiana della curva di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases}$

si ottiene eliminando  $t$  tra le due equazioni del sistema;

dalla prima equazione del sistema  $e^t = x - 2 \rightarrow e^{-t} = \frac{1}{x - 2}$

Sostituendo questa espressione nella seconda equazione, si ottiene l'equazione cartesiana della curva

$$y = \frac{1}{x - 2} + 3$$

- Equazione della retta tangente:

$$y(3) = \frac{1}{3 - 2} + 3 = 4 \quad \text{dato che già ci fornisce il testo.}$$

$$y' = -\frac{1}{(x - 2)^2} \quad y'(3) = -1 \quad \text{per cui l'equazione della retta tangente è}$$

$$y - 4 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 7$$

9. I possibili risultati del lancio di due dadi sono

$\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$ . Si tratta, in tutto, di 36 possibili esiti.

Indichiamo con  $A_1$  l'evento "si ottiene 10 lanciando due dadi". Le coppie favorevoli sono tre  $\{(4, 6)(5, 5)(6, 4)\}$

$$P(A_1) = \frac{\text{numero di casi favorevoli ad } A_1}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Indichiamo con  $A_2$  l'evento "ottenere due 10 lanciando sei volte due dadi".

Utilizzando la variabile aleatoria bernoulliana, si ha :

$$P(A_2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \frac{73205}{995328} \approx 0,0735 = 7,35\%$$

Indichiamo con  $A_3$  l'evento "ottenere almeno due 10 lanciando sei volte due dadi".

Indichiamo con  $\overline{A_3}$  l'evento contrario "ottenere al più un 10 lanciando sei volte due dadi".

$$P(\overline{A_3}) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^6 + \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 = \frac{2737867}{2985984} \approx 0,9169$$

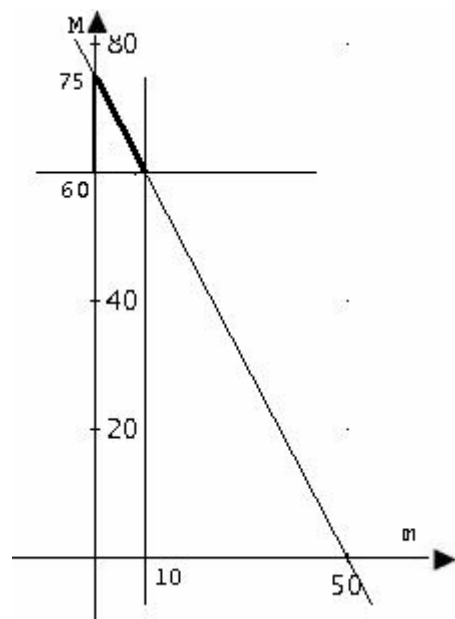
$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) \approx 1 - 0,9169 = 0,083 = 8,3\%$$

10. Indichiamo con  $M$  l'età media degli individui che hanno 60 anni o più e con  $m$  la media degli individui che hanno meno di 60 anni.

Si chiede se la media della popolazione può essere di 30 anni. Per questo, basta fare la media ponderata dell'età e porla uguale a 30:

$$\begin{cases} \frac{40}{100}M + \frac{60}{100}m = 30 \\ M \geq 60 \wedge 0 < m < 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2M + 3m = 150 \\ M \geq 60 \wedge 0 < m < 60 \end{cases}$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali con  $M$  sull'asse delle ordinate e  $m$  sull'asse dell'ascisse.



L'equazione  $2M + 3m = 150$  ha come diagramma una retta.

Da esso si osserva che è possibile che l'età media della popolazione sia 30 anni se il 40% degli individui aventi 60 anni o più abbiano una età inferiore a 75 anni;

l'età media degli individui che hanno meno di 60anni è  $m = 50 - \frac{2}{3}M$  e quindi  $0 < m < 10$

(difficile da pensare in una popolazione reale ).