

QUESTIONARIO

1. Sia AB il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r . L'angolo al centro \widehat{AOB} misura 36° e gli angoli alla base del triangolo isoscele AOB misurano 72° . Si tracci la bisettrice dell'angolo \widehat{OAB} . Gli angoli del triangolo AHB misurano:

$$\widehat{ABH} = 72^\circ \quad \widehat{BAH} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 72^\circ$$

Inoltre $AB = AH = OH$

I triangoli OAB e AHB sono simili per il primo criterio di similitudine per avere gli angoli uguali e perciò hanno i lati omologhi in proporzione:

$$OA : AB = AB : HB \quad \text{ossia} \quad OB : AB = AB : HB$$

Quindi AB è la sezione aurea del raggio.

(Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento è quel segmento medio proporzionale tra il segmento stesso e la sua parte rimanente).

Posto $\overline{AB} = x$ si ha $\overline{HB} = r - x$ e quindi

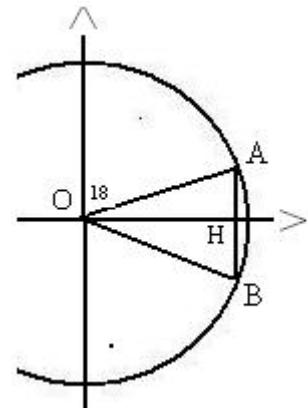
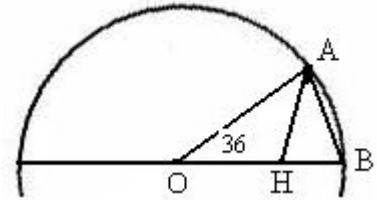
$$r : x = x : (r - x) \quad \rightarrow \quad x^2 + rx - r^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r ; \quad \text{con } r=1 \quad \text{si ha} \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Riferendoci alla seconda figura:

$$\sin 18^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$



2. Affinchè sia minima la quantità di materiale necessaria per realizzare la lattina di volume 0,4 litri, occorre minimizzare la superficie totale del cilindro circolare $S = 2\pi r(r+h)$ dove con r e h indichiamo il raggio di base e l'altezza del cilindro.

Da $V = \pi r^2 h$ otteniamo $h = \frac{V}{\pi r^2}$ e quindi $S = 2\pi r(r + \frac{V}{\pi r^2}) \rightarrow S = 2\pi r^2 + \frac{0,8}{r}$

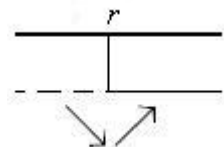
$$S' = 4\pi r - \frac{0,8}{r^2} \quad \rightarrow \quad S' = \frac{4\pi r^3 - 0,8}{r^2}$$

$$S' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 - 0,8 \quad \rightarrow \quad r \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} \quad (\approx 0,399)$$

Per $r = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}}$ è minima la superficie del cilindro e, quindi, è minima

la quantità di materiale necessaria per realizzare la lattina.

Poichè V è espresso in litri ($1l = 1dm^3$), r è espresso in dm : $r = \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} dm = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5\pi}} cm \quad (\approx 3,99cm)$



Volendo generalizzare i risultati - osservando che $0,8 = 2 \cdot 0,4$ - possiamo scrivere: $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

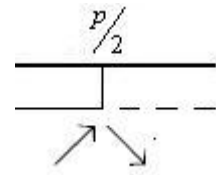
3. Per $\sin x = 1$ ($x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) la funzione $y = x \sin x$ diventa $y = x$ e la sua derivata $y' = \sin x + x \cos x$ diventa $y' = 1 + 0 = 1$ come il coefficiente angolare di $y = x$.
Ne segue che nei punti x_0 , poichè la curva e la retta hanno ordinata e derivata uguale, la curva è tangente alla retta $y = x$.

Analogamente si dimostra che la curva è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.

4. Perimetro del rettangolo = $2p$ 1° lato = x 2° lato = $p - x$

Area dei rettangoli: $y = x(p - x)$ $y' = p - 2x$

$$y' \geq 0 \Rightarrow p - 2x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{p}{2}$$



L'area è massima per $x = \frac{p}{2}$. Poiché anche il secondo lato

misurerà $\frac{p}{2}$ il rettangolo di area massima è un quadrato.

5. Consideriamo la successione il termine generale è $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}_0$. E'

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Risulta anche $e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ dove $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ è una funzione reale di variabile reale, definita per $x \neq 0$.

$$- f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x$$

$$\text{essendo } \lim_{h \rightarrow 0} e^x = e^x \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$$

6. Indichiamo con: $D_{n,k}$ ($n \geq k$) il numero di permutazioni di n elementi di classe k

$C_{n,k}$ ($n \geq k$) il numero di combinazioni di n elementi di classe k

P_n il numero di permutazioni di n elementi

si conosce che $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

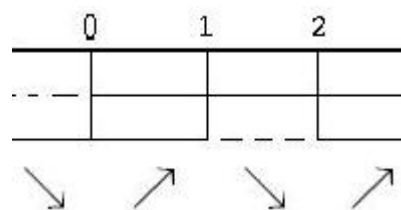
7. La funzione $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ è definita in \mathfrak{R} .

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = \infty$ essendo, per $x \rightarrow \pm\infty$, x^4 un infinito di ordine superiore rispetto agli altri ($4x^3; 4x^2$) e 3 un numero finito.

- Studiamo il segno della derivata: $y' = 4x(x^2 - 3x + 2)$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases}$$

0 e 2 sono punti di minimo relativo, ma anche assoluto; inoltre $f(0) = 3 > 2$ e $f(2) = 3 > 2 \Rightarrow f(k) > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Quindi non esiste nessun numero reale k per cui $f(k) = 2$.

8. L'ottaedro $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ può essere considerato come l'unione di due piramidi quadrangolari regolari aventi la base comune

$O_2O_6O_4O_5$, la prima con vertice in O_1 , la seconda con vertice in O_3 .

Gli spigoli sono tutti uguali tra di loro; uno di essi, per esempio O_1O_2 , è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele O_1O_2A ; O_1A e AO_2 sono metà dello spigolo del cubo.

Quindi l'ottaedro è regolare.

Detta S_1 l'area di base delle piramidi e S l'area

di una delle facce del cubo è: $S_1 = \frac{O_2O_4 \cdot O_6O_5}{2}$

ossia $S_1 = \frac{S}{2}$.

L'altezza di ognuna delle due piramidi è metà di quella, h , del cubo, che è uguale a quella dell'ottaedro, per cui, detti V_1 e V i volumi dell'ottaedro e del cubo rispettivamente, si ha:

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot \frac{h}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{6} V \quad \rightarrow \quad \frac{V}{V_1} = 6$$

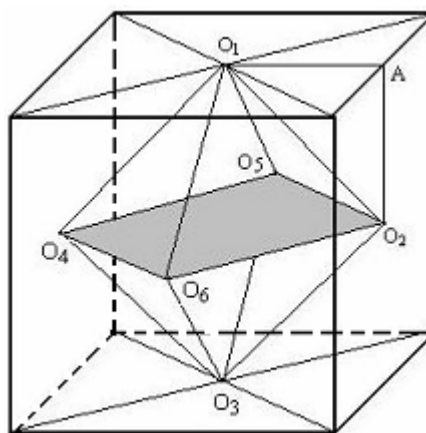
9. Essendo 35° e 55° angoli complementari, si ha:

$$\sin^2(35^\circ) + \sin^2(55^\circ) = \sin^2(35^\circ) + \cos^2(35^\circ) = 1$$

10. La funzione: $f(x) = \arctg x - \arctg \frac{x-1}{x+1}$ non è definita per $x = -1$.

$$\text{Calcoliamo la derivata: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{2x^2+2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \operatorname{arctg} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \operatorname{arctg} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg}(\infty) = \pi \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \operatorname{arctg} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \operatorname{arctg} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \right]$$

Da ciò si deduce che la funzione ha il valore costante $-\frac{3}{4}\pi$ per $x < -1$ e un altro valore

costante $\frac{\pi}{4}$ per $x > -1$

In $x = -1$ la funzione presenta una discontinuità di 1^a specie.

