

QUESTIONARIO

1. Le partite, di andata e di ritorno, sono tante quante le disposizioni semplici di 18 elementi di classe 2:

$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$$

Le partite, solo di andata o solo di ritorno, sono tante quante le combinazioni semplici di 18 elementi

di classe 2:

$$C_{18,2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

2. Evento A: la lampada estratta dalla scatola A è difettosa
 Evento B: la lampada estratta dalla scatola B è difettosa
 Evento C: la lampada estratta dalla scatola C è difettosa
 Evento D: una lampada è difettosa

Poiché la scatola da cui estrarre la lampada viene scelta a caso $\Rightarrow P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$

La probabilità che la lampada estratta sia difettosa è

$$P(D/A) = \frac{5}{100} \quad \text{qualora provenga dalla scatola A}$$

$$P(D/B) = \frac{20}{100} \quad \text{qualora provenga dalla scatola B}$$

$$P(D/C) = \frac{10}{100} \quad \text{qualora provenga dalla scatola C}$$

In base al teorema delle probabilità totali, la probabilità che la lampada estratta sia difettosa è

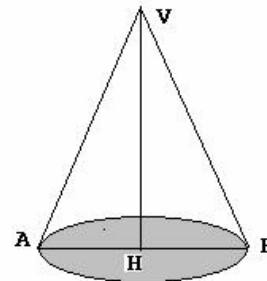
$$P(D)=P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{7}{60} \cong 0,1167$$

Sapendo le percentuali delle lampade difettose è stato inutile ai fini del calcolo della probabilità la conoscenza del numero delle lampade contenute nelle scatole.

3. $\overline{VA} = \overline{VB} = 2 \text{ dm} \quad \overline{VH} = x \quad 0 < x < 2$
 $\overline{HB} = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \pi \cdot (4 - x^2) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4x - x^3)$

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4 - 3x^2) \quad V' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 3x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \underbrace{\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad}$$



$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{è punto di massimo assoluto (e relativo)} \quad \rightarrow \quad V = \frac{16\sqrt{3}}{3} \pi \text{ dm}^3$$

Poiché $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} = 100 \text{ cl}$ si ha $V_{\max} \cong 322,45 \text{ cl}$

4. Alcuni esempi: $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)^2 + 2$
 La curva incontra la retta $y = 2$ nei punti di ascissa $\pm 1 \pm 2$

$$y = 2 + (x - 2)^4 \quad y = 2 + (x + 1)^4$$

Sono curve tangenti alla retta $y = 2$, rispettivamente, nei punti di ascissa 2 e -1

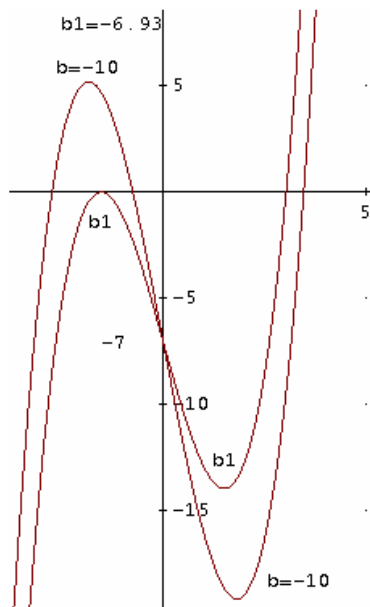
$$y = 2 + (x - 2)^2(x^2 - 1)$$

La curva incontra la retta $y = 2$ nei punto di ascissa ± 1 ed è tangente alla retta nel punto di ascissa 2

5. La seconda funzione polinomiale è la derivata della prima funzione polinomiale.
 Questa, per ipotesi, ammette almeno due radici reali $x_1 \ x_2$ ossia assume il valore zero in

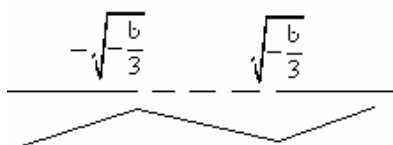
tali punti; è continua e derivabile nell'intervallo $[x_1; x_2]$; soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e, quindi $y'=0$ in $x_0 \in]x_1; x_2[$ ossia $n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$ ha uno zero nell'intervallo $]x_1; x_2[$

6. Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + bx - 7$ è definita e continua in \mathfrak{R} ; interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0;-7)$; inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
 Perché l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali la funzione $f(x)$ deve intersecare l'asse delle ascisse in tre punti e, quindi deve avere un massimo o un minimo di ordinate opposte o che una delle ordinate sia zero.



$$y' = 3x^2 + b \quad y' = 0 \Leftrightarrow b < 0$$

$$y' \geq 0 \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{b}{3}} \vee x > \sqrt{\frac{b}{3}}$$



$$f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right) < 0 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3} + b\sqrt{\frac{b}{3}} - 7 < 0 \rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{-b^3} - \sqrt{\frac{b^3}{3}} < 7 \rightarrow -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{3}} < 7$$

$$-\frac{b^3}{3} > \frac{49 \cdot 9}{4} \Rightarrow b < -3 \cdot \sqrt[3]{\frac{49}{4}} \cong -6.92$$

7. $4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \cdot [\arctan x]_0^1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$

APPROSSIMAZIONE DI pi greco

$$y = 1/(1+x^2)$$

Metodo di Simpson

Metodo dei trapezi

2n	x	f(x)
0	0	1
1	0,1	0,99009901
2	0,2	0,961538462
3	0,3	0,917431193
4	0,4	0,862068966
5	0,5	0,8
6	0,6	0,735294118
7	0,7	0,67114094
8	0,8	0,609756098
9	0,9	0,552486188
10	1	0,5

$$0,785398153 \cdot 4 = 3,141592614$$

n	x	f(x)
0	0	1
1	0,1	0,99009901
2	0,2	0,961538462
3	0,3	0,917431193
4	0,4	0,862068966
5	0,5	0,8
6	0,6	0,735294118
7	0,7	0,67114094
8	0,8	0,609756098
9	0,9	0,552486188
10	1	0,5

$$0,784981497 \cdot 4 = 3,139925989$$

8. Si tratta del volume del solido generato per rotazione intorno all'asse delle ascisse dall'area compresa tra la curva $y = \sqrt{x^3}$, l'asse delle ascisse e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

Poiché $\int_0^1 \pi x^3 dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ un altro esempio può essere un cilindro avente 1 come raggio di base e $\frac{\pi}{4}$ come altezza.

$$\begin{aligned} 9. \quad f''(x) &= \text{sen}x &\Rightarrow & f'(x) = -\cos x + c_1 \\ f'(0) &= 1 &\Rightarrow & -1 + c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2 \\ f'(x) &= -\cos x + 2 &\Rightarrow & f(x) = -\text{sen}x + 2x + c_2 \\ \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \pi + c_2 \quad f(0) = c_2 \right\} &&\Rightarrow & f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \pi - 1 \end{aligned}$$

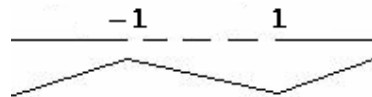
10. Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ è definita e continua in \mathfrak{R} ; interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0;1)$; inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Perché l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ abbia tre radici reali la funzione $f(x)$ deve intersecare l'asse delle ascisse in tre punti e, quindi deve avere un massimo o un minimo di ordinate opposte o che una delle ordinate sia zero.

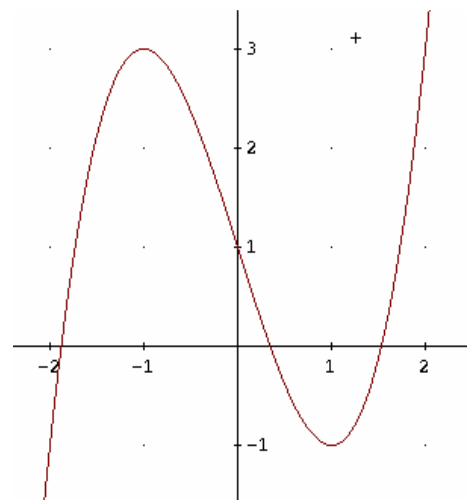
Infatti: $f(0) = 1$ $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f' \geq 0 \Rightarrow$

$x \leq -1 \vee x \geq 1$



$f(-1) = 3 > 0$ $f(1) = -1 < 0$



$x^3 - 3x + 1 = 0$

$0 < x < 1$ Ricerca delle soluzioni dell'equazione
METODO DI BISEZIONE

n	an	f(an)	bn	f(bn)	$x_n = (b_n + a_n)/2$	f(x _n)
0	0	1	1	-1	0,5	-0,375
1	0	1	0,5	-0,375	0,25	0,265625
2	0,25	0,265625	0,5	-0,375	0,375	-0,0722656
3	0,25	0,265625	0,375	-0,072265625	0,3125	0,09301758
4	0,3125	0,09301758	0,375	-0,072265625	0,34375	0,0093689
5	0,34375	0,0093689	0,375	-0,072265625	0,359375	-0,0317116
6	0,34375	0,0093689	0,359375	-0,031711578	0,3515625	-0,0112357
7	0,34375	0,0093689	0,351563	-0,011235714	0,34765625	-0,0009493
8	0,34375	0,0093689	0,347656	-0,000949323	0,345703125	0,00420583
9	0,345703	0,00420583	0,347656	-0,000949323	0,346679688	0,00162726
10	0,34668	0,00162726	0,347656	-0,000949323	0,347167969	0,00033872
11	0,347168	0,00033872	0,347656	-0,000949323	0,347412109	-0,0003054

La soluzione, a meno di 1/100, è 0,34 che si ottiene al 7° passo

La soluzione, a meno di 1/1000, è 0347 che si ottiene al 10° passo