QUESTIONARIO

1) $M_a = \dfrac{a+b}{2}$ Media Aritmetica ; $M_g = \sqrt{a \cdot b}$ Media Geometrica

$\mathrm{M_a} > \mathrm{M_g} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 > 4 \cdot a \cdot b \quad \rightarrow$

$a^2 + b^2 - 2ab > 0$ ossia $(a-b)^2 > 0$ Ciò è sempre vero, se si esclude il caso $a = b$;
in tal caso le due medie risultano uguali.

Generalizziamo: $\mathrm{M_a} = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \mathrm{M_g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

2. Evento E : "ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado"

Evento $\overline{E}$: "negazione dell'evento E"

In ogni lancio la probabilità che non esca 1 è $5/6$, in 4 lanci si ha

$$P(\overline{E}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad P(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - 0{,}48225 = 0{,}51775$$

Evento F : "ottenere un doppio 1 con 24 lanci di due dadi"

Evento $\overline{F}$: "negazione dell'evento F"

Nel lancio di due dadi le combinazioni possibili sono 36 . La probabilità che non ci sia una coppia $(1;1)$ è $35/36$; in 24 lanci $P(\overline{F}) = \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \quad \Rightarrow \quad P(F) = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} = 1 - 0{,}5086 = 0{,}4914$.

Quindi $P(E) > P(F)$

3. Evento E :"12 partite terminino in parità (X), l'ultima con vittoria $(1 \sim 2)$;

I casi che una partita non termini in parità sono 2 su 3. Poiché le partite sono 13 tutti i casi favorevoli $\mathrm{N}(E)$ sono $13 \cdot 2$. Poiché ognuna delle 13 partite ha 3 esiti, si ha che tutti gli esiti possibili sono $N = 3^{13}$. Dunque, ricordando la definizione di probabilità, si ha

$$P(E) = \frac{N(E)}{N} = \frac{13 \cdot 2}{3^{13}} \simeq 0{,}0000163 = 163 \cdot 10^{-7}$$

4. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \dfrac{3^n \cdot 3}{(n+1) \cdot n!} \cdot \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{3}{n+1}$. Poiché $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{n+1} = 0$, per il criterio del rapporto, anche la successione di termine generale $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ converge a zero.

5. La funzione f è periodica con periodo T, se T è il minimo valore reale per cui si ha $f\left(x+T\right)=f(x)$

- Periodicità della $f(x)=-sen\dfrac{\pi x}{3}$

T è il periodo della funzione f se $\quad sen\dfrac{\pi x}{3}=sen\left[sen\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(x+T\right)\right] \qquad (1)$

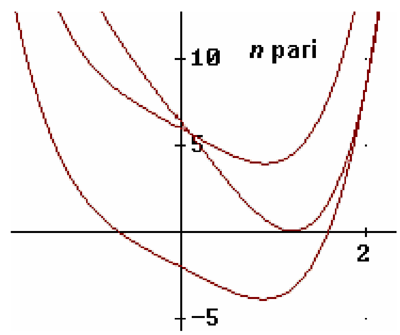
Trasformiamo $sen\dfrac{\pi x}{3}$: $\quad sen\dfrac{\pi x}{3}=sen\left(\dfrac{\pi x}{3}+2\pi\right)=sen\left[\dfrac{\pi}{3}\left(x+2\pi\cdot\dfrac{3}{\pi}\right)\right]=sen\left[\dfrac{\pi}{3}\left(x+6\right)\right]$

Dal confronto con la (1) segue $\quad \dfrac{\pi}{3}\cdot\left(x+T\right)=\dfrac{\pi}{3}\left(x+6\right) \quad$ ossia $\quad T=6$

- Analogamente si trova che il periodo di $\text{sen}2x$ è π.

6. La funzione $\quad f(x)=x^n+px+q \quad$ è continua e derivabile in tutto $\Re$.

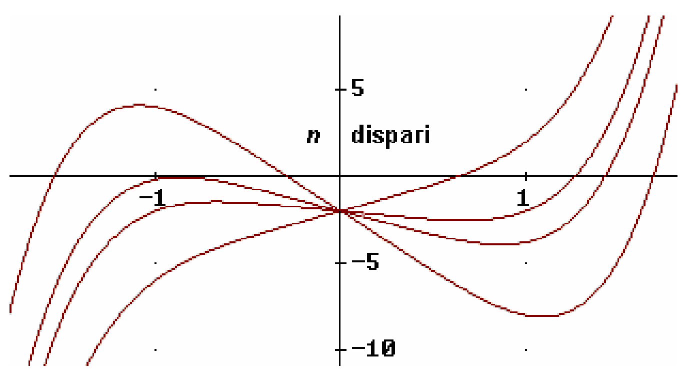
- se n è pari si ha: $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \quad$ Si possono, allora, trovare due punti a , b per cui $f(a)=f(b)=k$. Per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c\in\left]a;b\right[$: $f'(c)=0$
Tale punto è unico.



Infatti l'equazione $\quad nx^{n\text{-}1}+p=0 \quad$, con $n\text{-}1$ dispari, ottenuta ponendo $f'(x)=0$ ammette una sola soluzione reale (es: $4x^3+27=0$ ha come unica soluzione reale $-3/\sqrt[3]{4}$).

- se $f(c)>0$ l'equazione $f(x)=0$ non ammette soluzioni.
- se $f(c)=0$ l'equazione $f(x)=0$ ammette due radici coincidenti in quanto la curva risulta tangente all'asse x.
- se $f(c)<0$ l'equazione $f(x)=0$ ammette due soluzioni, in quanto la curva interseca due volte l'asse x .

- se n è dispari $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
quindi, per la continuità della funzione, questa incontra l'asse x almeno in un punto .



$f'(x)=\; nx^{n\text{-}1}+p \quad$ con $n\text{-}1$ dispari ;
Per il ragionamento fatto nel caso precedente, l'equazione $f'(x)=0$ ammette al più ammette al più due radici reali, ossia la $f(x)$ ammette al più due punti con tangente orizzontale. La funzione ha al più un massimo e un minimo relativo e, quindi, al più tre punti in cui si annulla; questo dipende dal fatto che le coordinate dei punti di massimo e di minimo sono concordi o discordi.

7. Non esiste $\lim\limits_{x\to\neq\infty} \operatorname{sen}x$; essendo la funzione $\operatorname{sen}x$ limitata , $-1 \le \operatorname{sen}x \le 1$, anche $\lim\limits_{x\to\neq\infty} \operatorname{sen}x$ è limitato tra gli stessi estremi;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$; inoltre e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a $3x$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - \operatorname{sen}x - 3x\right) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - \operatorname{sen}x - 3x\right) = +\infty$

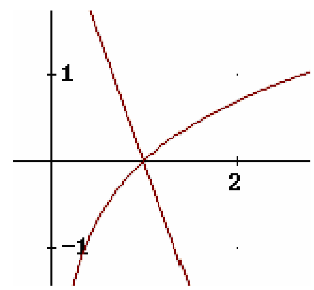
$\{$La funzione data $f(x) = e^x - \operatorname{sen}x - 3x$ è continua in $\Re$, $f(0) = 1$, $f(1) = e - \operatorname{sen}1 - 3 < 0\}$

$\Rightarrow$ per il teorema degli zeri, esiste un numero reale $x_0 \in \left]0;1\right[$ in cui la funzione si annulla.

8. La funzione $y = f(x) = 3x + \log x$ è definita in $\Re_0^+$. $f'(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ è positiva in $\Re_0^+$, quindi $f(x)$ è strettamente crescente nel dominio e, perciò, invertibile.

Detta $g(y) = f^{-1}$ la funzione inversa, si ha $g'(3) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

dove x_0 è il valore di x corrispondente a $y = 3$. Questo valore si ottiene risolvendo l'equazione $3 = 3x + \log x$;
una soluzione è $x = 1$; è anche l'unica. Infatti l'equazione è equivalente al sistema $\begin{cases} y = 3 \\ y = 3x + \log x \end{cases}$ La 2^a funzione del sistema è strettamente crescente in $\Re_0^+$ e incontra la retta y=3 in un solo punto.



Si poteva arrivare alla stessa conclusione osservando che l'equazione data è equivalente al sistema

$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ y = \log x \end{cases}$ che, risolto graficamente, dà una unica soluzione.

9. Posto $F(x) = x\cos\pi x$ si ha: $f(x) = F'(x)$ ossia $f(x) = D\left(x \cdot \cos\pi x\right) \rightarrow$
$f(x) = \cos\pi x - \pi x \cdot sen\pi x \quad \rightarrow \quad f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \cdot sen 4\pi = 1$

10. Un qualsiasi manuale dà una risposta adeguata al quesito.