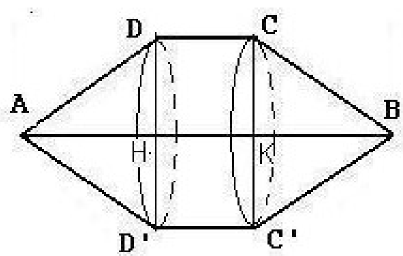
QUESTIONARIO

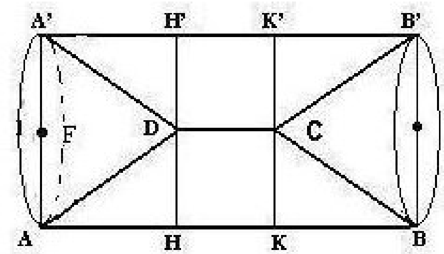
1) Volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio isoscele intorno alla base maggiore.

$$V_{AB} = V_{(cil:DCC'D')} + 2 \cdot V_{(con:BCC')} = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot CD + 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot AH$$

Poniamo $\overline{DH} = r$ $\quad \overline{DC} = \overline{HK} = DF = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 4 \cdot x \quad \overline{AH} = \tfrac{3}{2} x$

e quindi $\quad V_{AB} = \pi \cdot r^2 \cdot x + \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot x = 2\pi r^2 x$





Volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio isoscele intorno alla base minore.

$$V_{CD} = V_{(cil:ABB'A')} - 2 \cdot V_{(con:BCB')} = \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot AB - 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{DH}^2 \cdot DF$$

ossia $\quad V_{CD} = \pi \cdot r^2 \cdot 4x - \tfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot x = 3\pi r^2 x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_{AB}}{V_{CD}} = \dfrac{2}{3}$

2) Detti l_1 e l_2 i lati e $A_1 = A'/4$ e $A_2 = A''/4$ le aree delle singole facce dei tetraedri e ricordando il teorema delle sezioni parallele di una piramide, si ha:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = \sqrt{\frac{A'/4}{A''/4}} = \sqrt{\frac{A'}{A''}} = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V'}{V''} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

3) $a > b \quad \Rightarrow \quad a = b + x \quad (\text{con} \quad x > 0)$

$c > d \quad \Rightarrow \quad c = d + y \quad$ ossia $\quad d = c - y \quad (\text{con} \quad y > 0)$

$a - d = b + x - c + y = b - c + (x + y) > b - c$ La risposta corretta è la B.

4) $M_a = \dfrac{a+b}{2}$ Media Aritmetica ; $M_g = \sqrt{a \cdot b}$ Media Geometrica

$$M_a > M_g \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 > 4 \cdot a \cdot b \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ab > 0$$

ossia $\quad (a-b)^2 > 0 \quad$ Ciò è sempre vero, se si esclude il caso $a = b$, nel qual caso $M_a = M_g$.
Poichè il quesito chiede se è vera o falsa la proposizione per due numeri positivi, *comunque scelti*, la proposizione è falsa.

5) $$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+b(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\frac{(a+b)x+a-3b}{(x+1)(x-3)}$$

Per il principio d'identità dei polinomi, supposto $x \neq 3$ e $x \neq -1$, si ha:

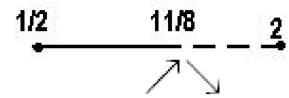
$$(a+b)x+a-3b=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

6) Essendo f(x) continua nell'intervallo chiuso e limitato $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ammette massimo e minimo assoluti, per il teorema di Weierstrass:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=0 \qquad f(2)=0 \qquad f'(x)=2(2x-1)^6(4-2x)^4(33-24x)$$

Essendo $(2x-1)^6$ e $(4-2x)^4$ potenze ad esponente pari, i punti $\frac{1}{2}$ $(2x-1=0)$ e 2 $(4-2x=0)$ sono punti di flesso a tangente orizzontale.

$f'(x)>0$ per $x<\frac{11}{8}$ Tale punto è di massimo relativo ed è anche di massimo assoluto.



I punti $\frac{1}{2}$ e 2 sono punti di minimo assoluto.

7) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(x)=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}$

8) Alla funzione è applicabile il teorema di Lagrange in quanto soddisfa le ipotesi di detto teorema:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(x_o) \quad \text{con} \quad x_0 \in (1;3) \quad \to \quad f(3)=1+2f'(x_0)$$

Essendo $0 \le f'(x_o) \le 2 \quad \Rightarrow \quad 1+2\cdot 0 \le f(3) \le 1+2\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le f(3) \le 5$

9) Determiniamo il dominio: $\begin{cases} x^2-1 \ge 0 \\ 1-x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left[1;+\infty\right[\\ x \in [-1;1] \end{cases}$

L'intersezione dei due insiemi è l'insieme $\{-1;1\}$. La risposta corretta è la B .

10) Da $\int_0^2 f(x)dx=a$ e $\int_0^6 f(x)dx=b$ si ricava: $\int_2^6 f(x)dx=b-a$

Ponendo $2x=t$ abbiamo $dx=\frac{1}{2}dt \qquad x_1 \le x \le x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 \le t \le 2x_2$

$\int_0^3 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^6 f(t)dt=\frac{1}{2}b$. Dovendo essere $\int_0^3 f(2x)dx=\ln 2$ abbiamo

$$\frac{1}{2}b=\ln 2 \quad \to \quad b=\ln 4$$

$\int_1^3 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dx=\frac{1}{2}(b-a)$ Dovendo essere $\int_1^3 f(2x)dx=\ln 4$ abbiamo

$$\frac{1}{2}(\ln 4-a)=\ln 4 \quad \to \quad \ln 4-a=2\ln 4 \quad \to \quad a=-\ln 4$$