

## PROBLEMA 1

Sia  $AB$  un segmento di lunghezza  $2a$  e  $C$  il suo punto medio.

Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ :

- si verifichi che il luogo dei punti  $P$  tali che  $\frac{PA}{PB} = k$  ( $k$  costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di  $k$  per cui la soluzione degenera in una retta;
- si determini il luogo geometrico  $\gamma$  dei punti  $X$  che vedono  $AC$  sotto un angolo di  $45^\circ$ ;
- posto  $X$ , appartenente a  $\gamma$ , in uno dei due semipiani di origine la retta per  $A$  e per  $B$  e indicato con  $\alpha$  l'angolo  $\widehat{XAC}$  si illustri l'andamento della funzione  $y = f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$  e  $x = \operatorname{tg} \alpha$ .

## PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con  $a$  e  $b$  diversi da zero.

- si trovino i valori di  $a$  e  $b$  tali che la curva  $\Gamma$  grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in  $x=1$ ;
- si studi e si disegni  $\Gamma$ ;
- si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di  $\Gamma$  con l'asse  $x$ ;
- si determini l'equazione della curva  $\Gamma'$  simmetrica di  $\Gamma$  rispetto alla retta  $y = y(1)$ ;
- si disegni, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|$$

## QUESTIONARIO

- Provare che una sfera è equivalente ai  $2/3$  del cilindro circoscritto.
- Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:
$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$
- Dimostrare che se  $p(x)$  è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di  $p(x)$  c'è una radice di  $p'(x)$ .

4. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7. Verificato che l'equazione  $x - e^{-x} = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?
9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.
10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».