

## QUESTIONARIO

1) Da  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow a$  non si può concludere che  $f(a) = l$

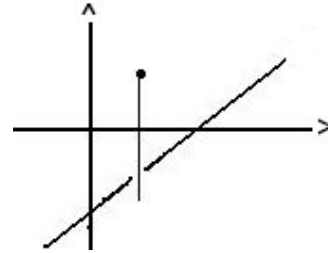
Perchè esista  $f(a)$  bisogna aggiungere che la funzione  $f$  è definita in  $a$ ; poi bisogna aggiungere la continuità di  $f(x)$  in  $a$  perchè sia  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Esempi: a) La funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  non è definita per  $x = 1$  ma esiste il limite per  $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

b) Consideriamo la funzione  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Si ha  $f(1) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ; essa è definita in 1 ma non è ivi continua.



$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x \cdot e^x} = \frac{0}{0}$$

Si può applicare il teorema de L'Hospital; ricordando che

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x) \quad \text{si ha:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x + 2x \cdot e^x} = \frac{f(0)}{2e^0} = \frac{2}{2} = 1$$

3) Il cubo  $ABCD A' B' C' D'$  viene diviso dai piani  $ACC' A'$  e  $DEE' D'$  in tre prismi triangolari di base, rispettivamente,  $APD$ ,  $APE$ ,  $DPC$  e in quarto prisma a base quadrangolare  $EPCB$ .

Hanno stessa altezza che è uguale allo spigolo del cubo.

Per dimostrare quanto chiesto dal quesito, basterà, allora, far vedere che la base della parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

$$AE = \frac{1}{2} AD \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{PD} = \frac{1}{2}$$

Nel triangolo  $AED$ ,  $AP$  è la bisettrice; essa divide il lato opposto  $DE$  in parti proporzionali agli altri

$$\text{due lati, ossia} \quad PE = \frac{1}{2} DP \quad \Rightarrow \quad PE = \frac{1}{3} DE$$

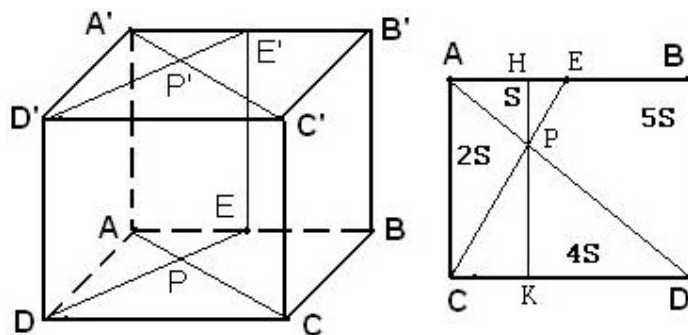
I triangoli  $AEP$ ,  $APD$ ,  $ADE$  hanno l'altezza uguale se riferiti alle basi  $PE$ ,  $PD$ ,  $DE$ , quindi:

$$S(AEP) = \frac{1}{2} S(APD) = \frac{1}{3} S(AED) \quad \Rightarrow \quad HP = \frac{1}{3} AD \quad \text{e quindi} \quad PK = 2 \cdot PH$$

$$\text{Poiché anche} \quad DC = 2 \cdot AE \quad \text{è} \quad S(PDC) = 4 \cdot S(AEP)$$

Se indichiamo con  $\mathbf{s}$  l'area del triangolo  $AEP$ , ossia se  $\mathbf{s} = S(AEP)$  si ha  $S(APD) = 2 \cdot \mathbf{s}$

$$S(PDC) = 4 \cdot \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad S(ABC) = S(ADC) = 6 \cdot \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad S(EPCB) = 5 \cdot \mathbf{s}$$



4) Si trova la dimostrazione in un qualsiasi manuale di Geometria

5) Questa proposizione è una diretta conseguenza del teorema del Teorema di Lagrange.

Se la funzione è derivabile in  $[a;b]$ , ivi è anche continua; sia  $x \in ]a;b[$ . Si ha per il

teorema di Lagrange :  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0)$  con  $x_0 \in ]x;a[$  da cui, essendo

$$f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in ]a;b[ \quad \text{si ha} \quad f(x) - f(a) = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = f(a)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k) + k(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \\ &= \left[ \text{poniamo in evidenza } (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \right] \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)[(n-k)+k]}{k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

7) Il triangolo isoscele ha area massima.

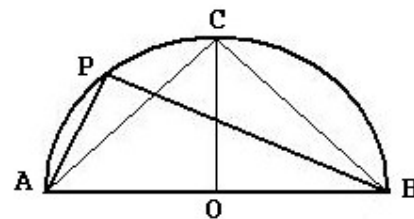
Infatti tutti i triangoli inscritti in una semicerchio sono rettangoli e hanno come base il diametro AB. L'area dipende dalla lunghezza dell'altezza; questa è massima se è uguale al raggio; in questo caso il triangolo è isoscele.

La scelta è limitata alle opzioni a o b.

Per vedere se il perimetro di tale triangolo è massimo o è minimo procediamo così. Consideriamo il triangolo

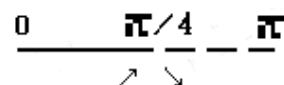
rettangolo  $APB$  e poniamo  $\widehat{PAB} = x$  con  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\overline{PA} = 2r \cdot \cos x \quad \overline{PB} = 2r \cdot \sin x$$



$$2p = 2r(\cos x + \sin x + 1) \quad p' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sin x + \cos x \geq 0$$

$$\text{Per } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \quad -\tan x + 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \tan x \leq 1$$



Il perimetro è massimo per  $x = \frac{\pi}{4}$ . La risposta esatta è la a.

8)  $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$  è una funzione razionale intera definita in  $\mathfrak{R}$ , ivi continua e derivabile

$$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3 \quad \Delta/4 = 4a^2 + 9a \quad \Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -\frac{9}{4} \vee a > 0$$

Per  $a < -\frac{9}{4} \vee a > 0$  la funzione ammette un massimo e un minimo relativo;

Per  $-\frac{9}{4} < a < 0$  la funzione non ammette estremanti;

Per  $a = 0$   $f(x) = -3x$  equazione di una retta decrescente in  $\mathfrak{R}$ ;

Per  $a = -\frac{9}{4}$   $f'(x) = -3 \cdot \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2$  Essendo  $f'(x) = 0$  per  $x = -\frac{2}{3}$  e  $f'(x) \neq 0$  per  $x \neq -\frac{2}{3}$

la funzione è sempre decrescente in  $\mathfrak{R}$  e presenta un flesso in  $x = -\frac{2}{3}$

9) E'  $-1 \leq \sin x \leq 1$  e  $-1 \leq \cos x \leq 1$  per cui  $\sin x - \cos x$  è una funzione limitata e, quindi  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - \cos x}{x} = 0$  La risposta esatta è la *a*.

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{\cos x}{x} \right)} = 1 \quad \text{essendo} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

Per vedere se è applicabile il teorema dell'Hopital calcoliamo la derivata del denominatore:

$$D(x - \cos x) = 1 + \sin x \quad 1 + \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

La derivata del denominatore si annulla in infiniti punti; venendo meno una delle ipotesi, il limite non è calcolabile mediante il teorema dell'Hopital.